

# 数 学

〈監督者の指示があるまで開いてはいけない〉

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。  
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。  
ただし、試験途中には持ち出してはいけない。

1. 次の  にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

2つの袋 A, B があり, それぞれに 1, 2, 3 の数字がひとつずつ書かれた 3 個の玉が入っている。袋 A, B から玉を 1 個ずつ取り出し, 取り出した 2 個の玉に書かれた数の差の絶対値が 1 であるときはそれらの玉を取り除き, そうでないときはもとの袋に戻すという操作を繰り返し行う。このとき,

2 回目の操作を終えたとき, 袋の中に玉がちょうど 1 個ずつ残っている確率は  (ア) ,

3 回目の操作を終えたとき, 袋の中に玉がちょうど 2 個ずつ残っている確率は  (イ)

である。

2. 2以上の自然数  $n$  に対して, 関数  $f_n(x)$  を  $f_n(x) = e^{-nx} + x - 1$  と定める。曲線  $y = f_n(x)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を  $S_n$  とするとき, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。ただし,  $e$  は自然対数の底とする。

3. 素数  $p$  は 3 以上の定数とする。自然数の数列  $\{a_n\}$  が

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \gcd(p, a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすとき、 $\cos\left(\frac{a_{n+p}}{a_n}\pi\right)$  を最大にする  $n$  をすべて求めよ。ただし、 $p$  と  $a_n$  の最大公約数を  $\gcd(p, a_n)$  で表す。

4.  $O$  を原点とする  $xyz$  空間に、5 点  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$ ,  $C(0, 0, 2)$ ,  $D(1, 1, 0)$ ,  $E(0, 0, 1)$  がある。線分  $OA$  上に動点  $P(p, 0, 0)$  ( $0 \leq p \leq 2$ ) をとり、平面  $PDE$  と直線  $BC$  との交点を  $Q$  とし、 $p$  が  $0 \leq p \leq 2$  の範囲を動くときに線分  $PQ$  が通過してできる図形を  $S$  とする。図形  $S$ , 平面  $x = 0$  および平面  $z = 0$  で囲まれた部分からなる立体を  $K$  とするとき、 $K$  の  $x \leq 2y$  をみたす部分の体積を求めよ。